Compositions de relations d'ordre sur des quantités graduelles et expression de requêtes flexibles

Daniel Rocacher* — Patrick Bosc* — Ludovic Liétard**

** IRISA/ENSSAT*
BP 80518, 22305 Lannion cedex, France
{rocacher, bosc}@enssat.fr

*** IRISA/IUT Lannion*
BP 150, 22302 Lannion cedex, France
ludovic.lietard@univ-rennes1.fr

RÉSUMÉ. Un objectif des bases de données est d'accroître la capacité d'expression des langages de requêtes. La théorie des ensembles flous et l'interrogation flexible permettent de prendre en considération des préférences dans les critères de sélection. La prise en compte conjointe des notions de préférence et de cardinalité nous a conduits à définir le concept d'entier graduel ($\mathbb{N}_f$). Ce cadre a ensuite été étendu en $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Q}_f$ afin de pouvoir traiter des requêtes comportant des différences et des divisions. Dans cet article, nous étudions comment définir des relations d'ordre entre ces nombre graduels et comment composer des critères utilisant de telles relations. Ces comparaisons entre quantités (graduelles ou non) sont très intéressantes pour traiter des requêtes comportant des quantificateurs flous absolus ou relatifs.

ABSTRACT. An issue in extending databases is to increase the expressiveness of query languages. Based on fuzzy set theory, flexible querying enables users to express preferences inside requirements. Quantifications and preferences on data have led us to define the notion of gradual integers ($\mathbb{N}_f$). This framework has been extended to $\mathbb{Z}_f$ and $\mathbb{Q}_f$, in order to dealing with queries based on difference or division operations. In this paper we study how to define fuzzy order relations between such gradual numbers and how to compose predicates using these fuzzy order relations. Such comparisons between (fuzzy or crisp) quantities are essential, in particular for dealing with flexible queries using absolute or relative fuzzy quantifiers.

MOTS-CLÉS : entier relatif graduel, nombre rationnel graduel, relations d'ordre graduelles, tolérance, implication floue, norme, conorme, interrogation flexible.

KEYWORDS: gradual integer, gradual rational, gradual order relations, tolerance, fuzzy implication, norm, conorm, flexible querying.

1. Introduction

Un des objectifs de la recherche dans le domaine des bases de données est d'améliorer la capacité d'expression des langages de requêtes afin de faciliter l'accès à des informations pertinentes. Différentes propositions ont été faites pour introduire des préférences dans des requêtes. On peut distinguer deux approches générales selon que les valeurs de préférences associées aux attributs sont commensurables ou pas. Dans le premier cas, les valeurs de préférences peuvent être agrégées pour délivrer une valeur globale et définir un ordre total sur les réponses. Dans le second cas, lorsqu'il n'y a pas commensurabilité, seul un ordre partiel des réponses, basé sur l'ordre de Pareto, est possible et des classes incomparables de réponses sont construites. Cette approche est détaillée dans (Chomicki, 2003) et illustrée par l'opérateur Skyline (Börzsönyi *et al*., 2001) ou dans PreferenceSQL (Kieβling *et al.*, 2002).

Les préférences des utilisateurs peuvent aussi être exprimées par des critères de sélection fondés sur des ensembles flous. Les prédicats ne sont alors plus en « tout ou rien » mais peuvent être plus ou moins satisfaits. Par exemple, dans la requête « trouver les employés jeunes et bien-payés de l'entreprise *X* », les critères *jeune* et *bien-payé* peuvent être plus ou moins satisfaits et leur définition doit tenir compte de préférences sur les valeurs des domaines indiquant lesquelles correspondent le mieux aux concepts décrits. Les critères *jeunes* et *bien-payé* sont définis par des ensembles flous permettant de restituer pour un âge et un salaire donnés des satisfactions définies sur une *même* échelle d'interprétation, généralement l'intervalle [0, 1]. Ces degrés de satisfaction sont donc *commensurables* et, en conséquence, composables. La théorie des ensembles flous est un cadre général permettant d'exprimer des requêtes flexibles et divers travaux portant sur l'expression et l'interprétation de requêtes flexibles dans le contexte du modèle relationnel (Bosc *et al*., 1995) et du modèle objet (Connan, 1999 ; Cross, 2003) ont d'ores et déjà vu le jour.

Cette étude se place dans le contexte de l'interrogation flexible de bases de données usuelles et s'intéresse plus particulièrement aux traitements conjoints de préférences et de quantités sur les données manipulées.

Le concept de multi-ensemble, c'est-à-dire de collection autorisant des occurrences multiples de ses éléments, trouve de nombreuses applications, en algorithmique notamment (Knuth, 1981), mais aussi dans les bases de données (Albert, 1991 ; Lamperti *et al*., 2001). Dans ce contexte, l'utilisation des multi-ensembles est principalement motivée par leur capacité à gérer des quantités. On note qu'ils facilitent également le traitement de certaines opérations en évitant la suppression des doubles. Les propriétés algébriques des multi-ensembles ont été largement étudiées, voir (Blizard, 1985) pour une présentation complète.

Nous avons montré (Rocacher, 2003) que l'utilisation des multi-ensembles pour gérer des quantités et des ensembles flous pour gérer des préférences, conduit à la définition d'une généralisation de ces structures appelée multi-ensemble flou (Yager, 1986 ; Miyamoto, 2001). Un multi-ensemble flou est un multi-ensemble dont chaque occurrence d'un élément est associée à un degré d'appartenance. Par exemple, un multi-ensemble flou peut être délivré par la requête : *trouver le salaire des employés jeunes*. Comme plusieurs employés peuvent avoir le même salaire, le résultat peut contenir des duplicats. De plus, chaque occurrence d'un salaire coïncide avec un employé plus ou moins jeune et est donc associée à un degré de satisfaction. Le multi-ensemble flou résultat correspond alors *la distribution des salaires des employés jeunes*.

Dans (Rocacher, 2003) nous avons proposé une approche qui caractérise les multi-ensembles flous et permet de traiter de manière uniforme les ensembles, ensembles flous, multi-ensembles et multi-ensembles flous. Cette construction s'appuie sur le concept d'entier naturel graduel ($\mathbb{N}_f$) qui correspond à la cardinalité d'un ensemble flou. Un tel nombre se distingue de la notion de nombre flou (Dubois *et al.*, 1987) dans la mesure où il ne recouvre aucune forme d'incertitude. Par la suite (Rocacher *et al.*, 2003), nous avons défini un cadre plus général, basé sur l'ensemble des entiers relatifs graduels ($\mathbb{Z}_f$), dans lequel il est possible de définir des différences exactes. L'intérêt de cette démarche est d'offrir une base algébrique permettant la composition de calculs. Enfin, $\mathbb{Z}_f$ a été prolongé en $\mathbb{Q}_f$, l'ensemble des nombres rationnels graduels (Rocacher *et al.*, 2005), afin de construire un système d'opérations multiplicatives fermé et de réaliser des divisions exactes. Ces contextes permettent de traiter des requêtes flexibles complexes basées sur des calculs entre quantités graduelles (Rocacher *et al.*, 2004) ou nécessitant la manipulation de multi-ensembles flous. Des requêtes de ce type sont, par exemple :

– calculer la moyenne des salaires des employés jeunes ;

– trouver les entreprises où le nombre des employés proches de la retraite est plus grand que celui des employés jeunes ;

– trouver les entreprises dont la plupart des employés jeunes sont bien-payés.

Notre objectif dans cet article est de montrer comment traiter, en s'appuyant sur la notion de nombre graduel, des requêtes flexibles portant sur des quantités et, notamment, comportant des quantificateurs flous absolus (*environ deux*) et des quantificateurs flous relatifs (*la plupart*). La démarche que nous développons consiste à définir des relations d'ordre entre nombres graduels. Ces comparaisons conduisent à définir une notion de valeur de vérité graduelle définie par un ensemble flou sur [0, 1]. Une telle valeur de vérité généralisée décrit exactement dans quelle mesure une relation d'ordre est satisfaite. Par la suite, si besoin, celle-ci peut être résumée en un degré évalué grâce à une mesure fondée sur une intégrale pondérée. Il est montré que ces relations d'ordre généralisent la notion d'implication floue. Cette émergence de valeurs de vérité généralisées nous conduit également à généraliser les opérateurs de conjonction et de disjonction afin de construire des requêtes complexes composant des prédicats portant sur des quantités graduelles.

Par la suite, en section 2, les constructions de $\mathbb{N}_f$, $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Q}_f$ sont brièvement rappelées. Puis, en section 3, nous étudions comment définir des relations d'ordre entre quantités graduelles. Le cadre ainsi obtenu nous permet, en section 4, de proposer une méthode générale pour traiter des requêtes flexibles comportant des expressions quantifiées dont les quantificateurs peuvent être absolus ou relatifs. Nous prolongeons ensuite cette analyse, en section 5, en décrivant comment de tels prédicats comportant des relations d'ordre sur des quantités graduelles peuvent être composés au moyen d'une généralisation d'opérateurs conjonctifs et disjonctifs. Le propos est illustré au travers de deux exemples simples et est confronté à la notion de cardinalité floue FECount définie par Zadeh (Zadeh, 1983).

2. Quantités graduelles

Dans cette section nous rappelons quelques éléments de base relatifs à la modélisation de quantités graduelles. Ceux-ci sont nécessaires à la compréhension des sections suivantes qui traitent de la comparaison de quantités graduelles.

Un ensemble flou, défini sur un domaine X, peut se définir par une fonction caractéristique, notée μ_E, telle que :

$$\begin{aligned} \mu_E : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \mu_E(x). \end{aligned}$$

La valeur $\mu_E(x)$ exprime dans quelle mesure l'élément x de X appartient à l'ensemble flou E. Quand $\mu_E(x)$ est nul, x n'appartient pas du tout à E et, quand il vaut 1, x est complètement dans E. Plus $\mu_E(x)$ est proche de 1 (resp. 0), plus (resp. moins) x appartient à E. Dans le cas d'un ensemble flou fini E, on note généralement :

$$E = \{\mu(x_1)/x_1, \ldots, \mu(x_n)/x_n\}.$$

Un ensemble flou peut également être décrit comme une collection d'ensembles ordinaires emboîtés grâce à la notion de *coupes de niveau* ou *α-coupes*. La coupe de niveau α de l'ensemble flou E, notée E_α, est l'ensemble usuel composé des éléments dont le degré d'appartenance à E est au moins égal à α, d'où :

$$E_\alpha = \{x \,/\, x \in X \text{ et } \mu_E(x) \geq \alpha\}.$$

La cardinalité floue $|E|$ d'un ensemble flou E est définie par un ensemble flou d'entiers caractérisé par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mu_{|E|}(n) = sup\{\alpha \,/\, |E_\alpha| \geq n\}.$$

Cette définition est aussi appelée FGCount(E) par Zadeh (Zadeh, 1983). Le degré α associé à un entier n de $|E|$, évalue dans quelle mesure E contient au moins n

éléments. Dans la littérature de nombreuses approches définissant la cardinalité floue d’un ensemble flou fini ont été proposées. Elles sont basées sur la définition de fonctions spécifiques sur les entiers naturels interprétées de manière conjonctive ou disjonctive (Wygralak, 1999 ; Delgado *et al*., 2002 ; Casasnovas *et al*., 2003).

Il est important de noter que, par la suite, nous nous appuyons sur une notion de cardinalité basée sur la fonction FGCount que nous interprétons comme "un tout" décrivant complètement, et exactement, la cardinalité d’un ensemble flou. Celle-ci est donc traitée comme un ensemble flou *conjonctif* d'entiers. Un tel nombre est parfaitement connu et ne recouvre *aucune forme d’incertitude*. De ce point de vue, cette approche se distingue des cardinalités floues fondées sur une interprétation disjonctive (Dubois *et al*., 1985) et s’appuyant sur une notion de nombre flou. En effet, il est habituel d’appeler *nombre flou* une valeur mal connue modélisée par une distribution de possibilité qui correspond à une collection disjonctive de valeurs possibles (Dubois *et al*., 1987). Pour marquer cette nuance, nous appelons *entiers graduels* ces quantités correspondant à des cardinalités floues non fondées sur des nombres flous. Le qualificatif de *graduel* exprime que la quantité considérée dépend du niveau d’exigence pris en compte pour interpréter le sous-ensemble flou sous-jacent. Une telle interprétation a également été récemment proposée dans (Dubois *et al.*, 2005). Par la suite, on note $\mathbb{N}_f$ l’ensemble des entiers naturels graduels.

Exemple 2.1. Soit l’ensemble flou $A = \{1/x_1, 1/x_2, 0.5/x_3, 0.2/x_4\}$, la cardinalité de A est représentée par : $|A| = \{1/0, 1/1, 1/2, 0.5/3, 0.2/4\}$. Le degré 0.5 de $|A|$ exprime dans quelle mesure l’ensemble flou A contient au moins 3 éléments. L’entier 3 est la cardinalité obtenue lorsqu’on ne considère que les éléments de A ayant atteint au moins le niveau d’exigence 0.5.♦

L’α-coupe d’un entier graduel x est un ensemble d’entiers formant une suite croissante $\{0, 1, \ldots, x_\alpha\}$ qui peut être représentée par sa plus grande valeur x_α. Par la suite, on appelle coupe de niveau α (ou α-coupe) cette plus grande valeur x_α. L’α-coupe d’un entier graduel x est donc représentée par un entier positif.

Sur $\mathbb{N}_f$, les opérations d’addition et de multiplication sont aisément caractérisées en s’appuyant sur le principe d’extension étendue et sont évaluables α-coupe par α-coupe (Wygralak, 1999). Ces opérations binaires # entre deux entiers graduels Q et Q' sont ainsi définie par :

$$\mu_{Q\#Q'}(z) = \sup_{(x,y)\,/\,x\#y \geq z} \min(\mu_Q(x), \mu_{Q'}(y)).$$

Exemple 2.2. Soit le multi-ensemble flou suivant : $A = \{<1, 0.1, 0.1>/a, <0.5>/b\}$ qui signifie que A contient trois occurrences de l’élément a, chacune étant affectée d’un degré d’appartenance, respectivement 1, 0.1 et 0.1, et une occurrence de b au degré 0.5. Les différentes α-coupes de A sont les multi-ensembles suivants : $A_1 = \{1{*}a\}$, $A_{0.5} = \{1{*}a, 1{*}b\}$, $A_{0.1} = \{3{*}a, 1{*}b\}$.

Les nombres d'occurrences des éléments *a* et *b* de *A* sont des entiers graduels notés respectivement : $\Omega_A(a) = \{1/0, 1/1, 0.1/2, 0.1/3\}$; $\Omega_A(b) = \{1/0, 0.5/1\}$. *A* peut également se noter : $A = \{\{1/0,1/1, 0.1/2, 0.1/3\}*a, \{1/0, 0.5/1\}*b\}$.

Si *B* est le multi-ensemble flou $\{\{1/0, 1/1, 0.5/2\}*a, \{1/0, 0.5/1\}*b\}$. L'union additive $A + B$, obtenue en regroupant les éléments de *A* et de *B*, est définie par :

$\Omega_{A+B}(a) = \Omega_A(a) \oplus \Omega_B(a) = \{1/0, 1/1, 0.1/2, 0.1/3\} \oplus \{1/0, 1/1, 0.5/2\} = \{1/0, 1/1, 1/2, 0.5/3, 0.1/4, 0.1/5\}$.

$\Omega_{A+B}(b) = \Omega_A(b) \oplus \Omega_B(b) = \{1/0, 0.5/1\} \oplus \{1/0, 0.5/1\} = \{1/0, 0.5/1, 0.5/2\}$. ♦

Dans $\mathbb{N}_f$, la différence de deux entiers graduels peut ne pas être définie. C'est pourquoi $\mathbb{N}_f$ a été étendu en $\mathbb{Z}_f$, l'ensemble des entiers relatifs graduels. Nous avons montré que ce support permet une généralisation où la différence peut toujours être représentée.

L'ensemble des entiers relatifs graduels $\mathbb{Z}_f$ est défini comme l'ensemble quotient $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f) / \mathcal{R}$ des classes d'équivalence sur $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f)$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f,\ (a, b)\ \mathcal{R}\ (a', b') \text{ ssi } a \oplus b' = a' \oplus b.$$

Un entier relatif graduel *x* s'identifie donc à une classe d'équivalence, notée (x^+, x^-), où x^+ et x^- sont des entiers positifs graduels. Par abus de langage, nous écrirons parfois « l'entier relatif graduel (x^+, x^-) ».

Exemple 2.3. Soit deux entiers graduels positifs : $a = \{1/0, 1/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.2/4\}$; $b = \{1/0, 1/1, 0.3/2\}$. Le couple $(a, b) = (\{1/0, 1/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.2/4\}, \{1/0, 1/1, 0.3/2\})$ est une instance de la classe d'équivalence définissant un entier relatif graduel ($\mathbb{Z}_f$). ♦

Une entier relatif graduel $x = (x^+, x^-)$ peut donc prendre plusieurs formes équivalentes. Cependant, *x* peut également se décrire de façon canonique en énumérant les valeurs $(x^+_\alpha - x^-_\alpha)$ pour toutes ses α-coupes différentes. Ces valeurs sont des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$). On obtient ainsi une représentation, notée x^c, définie par :

$$x^c = \sum \alpha_i / (x^+_{\alpha_i} - x^-_{\alpha_i})$$

où les α_i correspondent aux différents niveaux des α-coupes de x^+ *et* x^- (appelée α-coupe de x par extension) et où les $(x^+_{\alpha_i} - x^-_{\alpha_i})$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.4. La représentation canonique de (a, b) (cf. exemple 2.3) est obtenue en énumérant les valeurs de ses différentes α-coupes : $(a, b)^c = \{1/0, 0.8/1, 0.5/2, 0.3/1, 0.2/2\}^c$. ♦

Par la suite, un nombre graduel sera décrit de manière canonique en énumérant les valeurs de ses différentes α-coupes.

Si x et y sont deux entiers relatifs graduels, l'addition, $x \oplus y$, et la multiplication, $x \otimes y$, sont définies par les classes respectives : $(x^+ \oplus y^+, x^- \oplus y^-)$ et $((x^+ \otimes y^+) \oplus (x^- \otimes y^-), (x^+ \otimes y^-) \oplus (x^- \otimes y^+))$.

On relève que tout entier relatif graduel (x^+, x^-) a un opposé (x^-, x^+). Cette propriété est remarquable dans la mesure où elle n'est pas satisfaite dans le cadre des *nombres flous*. La différence de deux nombres relatifs graduels x et y se définit comme la somme de x et de l'opposé de y.

La question se pose de définir un inverse à tout entier graduel, ce qui nous conduit à construire $\mathbb{Q}_\mathrm{f}$, l'ensemble des nombres rationnels graduels. La démarche suivie est similaire à celle utilisée pour construire $\mathbb{Z}_\mathrm{f}$.

Soit $\mathbb{Z}_\mathrm{f}^*$ comme l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}_\mathrm{f}$ tel que : $\forall \alpha \in\ ]0, 1]$, $x_\alpha \neq 0$, et $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence telle que :

$$\forall (a, b) \text{ et } (a', b') \in \mathbb{Z}_\mathrm{f} \times \mathbb{Z}_\mathrm{f}^*, [a, b]\ \mathcal{R}'\ [a', b'] \text{ ssi } a \otimes b' = a' \otimes b.$$

L'ensemble des nombres rationnels graduels, noté $\mathbb{Q}_\mathrm{f}$, est l'ensemble quotient $(\mathbb{Z}_\mathrm{f} \times \mathbb{Z}_\mathrm{f}^*) / \mathcal{R}'$ des classes d'équivalence sur $(\mathbb{Z}_\mathrm{f} \times \mathbb{Z}_\mathrm{f}^*)$ par la relation $\mathcal{R}'$.

Un nombre rationnel graduel x est donc une classe d'équivalence dont une instance peut se noter $[x^n, x^d]$ où x^n et x^d appartiennent respectivement à $\mathbb{Z}_\mathrm{f}$ et $\mathbb{Z}_\mathrm{f}^*$. Une telle représentation peut également s'écrire à l'aide d'entiers positifs graduels : $[(x^{n+}, x^{n-}), (x^{d+}, x^{d-})]$. Comme pour les entiers relatifs graduels, il est possible de représenter un élément de $\mathbb{Q}_\mathrm{f}$ sous une forme compacte obtenue en énumérant les valeurs associées à ses différentes α-coupes. Ces valeurs correspondent à des nombres rationnels. La forme compacte est canonique si les rationnels de ses différentes α-coupes sont réduits.

Si x et y sont deux nombres rationnels graduels, l'addition, $x \oplus y$, et la multiplication, $x \otimes y$, sont définies respectivement par les classes : $[(x^n \otimes y^d) \oplus (y^n \otimes x^d), x^d \otimes y^d]$ et $[x^n \otimes y^n, x^d \otimes y^d]$. D'un point de vue calculatoire, on note que l'addition et la multiplication peuvent être évaluées en les appliquant sur les différentes α-coupes de leurs opérandes.

Si dans $\mathbb{Z}_\mathrm{f}$ tout entier graduel a un opposé, dans $\mathbb{Q}_\mathrm{f}$ tout rationnel graduel $[x^n, x^d]$ a un inverse $[x^d, x^n]$ (si $x^n \in \mathbb{Z}_\mathrm{f}^*$). L'opération de division entre deux rationnels graduels x et y, est alors définie comme la multiplication de x par l'inverse de y.

3. Relations d'ordre sur des quantités graduelles

On s'intéresse maintenant à la comparaison de quantités graduelles. Comme une quantité graduelle peut prendre plusieurs formes équivalentes, la comparaison de deux quantités graduelles peut poser quelques difficultés. Ce problème est levé en opérant sur des formes canoniques. Par ailleurs, comme $\mathbb{N}_f$ est inclus dans $\mathbb{Z}_f$ qui lui-même est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}_f$, les relations d'ordre sur les rationnels graduels sont également des relations d'ordre sur les entiers graduels.

Une relation d'ordre partielle booléenne entre deux quantités graduelles peut être définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}_f,\ x \geq y \ \text{ ssi } x \ominus y \in \mathbb{Q}_f^{\,+}, \qquad [1]$$

où $\ominus$ est la différence sur $\mathbb{Q}_f$ et $\mathbb{Q}_f^{\,+}$ est l'ensemble des entiers relatifs graduels dont toutes les α-coupes sont positives ou nulles. Autrement dit : $\forall\ \alpha \in\ ]0, 1]$, $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$, où - est la différence sur $\mathbb{Q}$; les valeurs associées à la forme canonique $(x \ominus y)^c$ sont donc positives ou nulles. Cette relation d'ordre est partielle car il suffit que pour une coupe α la propriété $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$ ne soit pas satisfaite, pour que x et y ne soient pas comparables au sens de la relation ≥ (même si α est faible).

Nous proposons, dans un premier temps, une extension de la relation d'ordre à valeur booléenne définie par [1] en définissant une relation d'ordre graduelle, notée $\geq_g$, exprimant que plus un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé satisfont la propriété $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$, plus, globalement, $x \geq_g y$ est satisfait. Puis, dans un second temps, nous examinons comment introduire une notion de tolérance floue au sein même de la relation d'ordre afin de permettre à certaines α-coupes d'enfreindre, quelque peu, la relation d'ordre. Cette relation d'ordre graduelle et tolérante est notée $\geq_{gT.}$

3.1. *Relation d'ordre graduelle*

3.1.1. *Satisfaction globale d'une relation d'ordre graduelle*

Soit les deux quantités graduelles x et y suivantes : $x = \{1/0, 0.8/1, 0.5/2\}$; $y = \{1/0, 0.9/1, 0.4/2\}$. Leur différence $\Delta = x \ominus y$ s'exprime sous une forme canonique par $\{1/0, 0.9/\text{-}1, 0.8/0, 0.5/1, 0.4/0\}^c$.

La satisfaction de la propriété $x \geq_g y$ se caractérise en établissant un bilan α-coupe par α-coupe (*i.e.* $\forall\ \alpha, \alpha \in\ ]0, 1]$) de la satisfaction de $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$. Nous appelons satisfaction globale, notée S, ce bilan. Pour l'exemple précédent, Δ_α (*i. e.* $x_\alpha - y_\alpha$) est positif pout tout α appartenant à $]0, 0.8] \cup\ ]0.9, 1]$, négatif sinon. La satisfaction globale S résultante peut alors se schématiser par la figure 1.

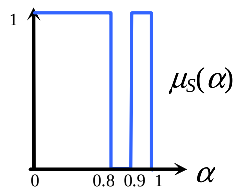

Figure 1. *Satisfaction globale S de $x \geq_g y$*

S est donc un ensemble sur [0, 1] dont la fonction caractéristique se définit par :

$\mu_S(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_\alpha < 0)$; $\mu_S(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\Delta_\alpha \geq 0)$.

L'ensemble S peut être vu comme une valeur de vérité généralisée décrivant précisément, α-coupe par α-coupe, de quelle manière la relation d'ordre sous jacente est satisfaite.

3.1.2. *Mesure d'une satisfaction globale*

L'évaluation de la relation d'ordre $x \geq_g y$ est caractérisée par une satisfaction globale S. La question qui se pose est alors de « résumer » une satisfaction globale par un degré entre 0 et 1 afin de pouvoir utiliser une telle expression dans une requête flexible. Dans ce but, nous nous proposons de définir une mesure M de S traduisant la sémantique « plus il y a un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé satisfaisant la propriété $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$, plus, globalement, $x \geq_g y$ est satisfait ». Une telle mesure doit respecter un certain nombre de propriétés que nous analysons ci-dessous. Nous montrons ensuite que cette notion de relation d'ordre graduelle généralise une implication floue.

Avant de proposer une définition pour M, examinons en les propriétés attendues.

Propriété 1. Lorsque que x et y sont tels que la propriété $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$ est satisfaite pour tout α, la relation d'ordre est entièrement satisfaite. La satisfaction globale de la propriété $x \geq_g y$ est l'ensemble noté S_1 tel que : $\forall\ \alpha \in\ ]0, 1]$, $\mu_{S1}(\alpha) = 1$. La mesure M de cet ensemble, qui évalue la satisfaction du prédicat graduel ($x \geq_g y$), vaut 1.

Propriété 2. Lorsqu'aucune α-coupe ne satisfait la relation d'ordre, l'ensemble représentant la satisfaction globale est $S_0 = \emptyset$ ($\forall\ \alpha \in\ ]0, 1]$, $\mu_S(\alpha) = 0$) et sa mesure M vaut 0.

Propriété 3. Lorsque x et y sont tels que seules les α-coupes entre 0 et un seuil t satisfont la propriété $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$, la satisfaction globale est l'ensemble S_t tel que : $\mu_{S_t}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0, t]$, $\mu_{S_t}(\alpha) = 0$ sinon. La mesure $M(S_t)$ vaut t, elle exprime que le prédicat est complètement satisfait jusqu'au degré t.

Cette propriété 3 est cohérente avec les deux premières.

Propriété 4. Lorsque deux satisfactions globales S_2 et S_3 ont le même nombre d'α-coupes satisfaites, la mesure de S_3 est supérieure à celle de S_2 si S_3 contient un plus grand nombre d'α-coupes de haut niveau satisfaites que S_2.

Considérons les deux ensembles S_2 et S_3, décrits par la figure 2, correspondant aux évaluations globales à de comparaisons entre quantités graduelles ($x_2 \geq_g y_2$ et $x_3 \geq_g y_3$). On constate qu'il y a le même nombre d'α-coupes satisfaisantes dans S_2 et dans S_3. Cependant, dans S_2 les α-coupes ayant une satisfaction nulle sont de degré plus élevé que celles de S_3. Ainsi, globalement, on peut dire que la relation d'ordre est mieux satisfaite par x_3 et y_3 que par x_2 et y_2 d'où $M(S_2) \leq M(S_3)$. Autrement dit, plus une α-coupe est de niveau élevé, plus son degré de satisfaction contribue à l'évaluation de M.

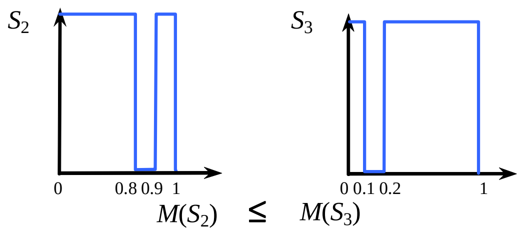

Figure 2. *Comparaison de deux satisfactions globales*

Propriété 5. Si S_4 (respectivement S_5) est l'ensemble représentant la satisfaction globale de la comparaison $x_4 \geq_g y_4$ (resp. $x_5 \geq_g y_5$) et que l'ensemble S_4 est inclus dans S_5, nous déduisons qu'un plus grand nombre d'α-coupes de S_5 satisfont la relation d'ordre. Dans ce cas $M(S_4) \leq_g M(S_5)$.

Différentes mesures M prenant en compte tout ou partie des propriétés précédemment énoncées peuvent être envisagées. Nous construisons maintenant progressivement une mesure satisfaisant la sémantique voulue pour M.

La mesure M_1 définie comme l'intégrale de la fonction caractéristique $\mu_S(\alpha)$ de l'ensemble flou des satisfactions par α-coupes :

$$M_1(S) = \int_0^1 \mu_S(\alpha)\, d\alpha$$

satisfait les propriétés 1, 2, 3 et 5 mais ne tient pas compte du niveau des α-coupes satisfaisantes (*i.e.* la propriété 4 n'est pas satisfaite car toutes les α-coupes ont la même importance). Pour satisfaire cette propriété il faut pondérer $\mu_S(\alpha)$ par une fonction de pondération dépendante de α qui soit croissante, par exemple par 2α. Ce qui conduit à :

$$M_2'(S) = \int_0^1 \mu_S(\alpha)\ 2\alpha\ d\alpha.$$

Dans ce cas, les propriétés 1, 2, 4, 5 sont satisfaites mais la propriété 3 ne l'est plus. En effet, si la satisfaction globale est l'ensemble S tel que $\forall\ \alpha \in\ ]0, t]$, $\mu_S(\alpha) = 1$ et $\forall\ \alpha \in\ ]t, 1]$, $\mu_S(\alpha) = 0$, alors :

$$M_2'(S) = \int_0^1 \mu_S(\alpha)\ 2\alpha\, d\alpha\ =\ t^2.$$

Il en découle la mesure M_2 normalisée suivante, satisfaisant les propriétés 1 à 5 :

$$M_2(S) = [\int_0^1 \mu_S(\alpha)\ 2\alpha\ \ d\alpha]^{1/2}.$$

La démarche suivie pour construire la mesure M_2 peut bien-entendue se généraliser. En effet, il suffit, par exemple, de choisir une intégrale pondérée par la fonction $p.\alpha^{p-1}$, ce qui établit la mesure paramétrée M_p :

$$M_p(S) = [\int_0^1 \mu_S(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ \ d\alpha]^{1/p}. \qquad [2]$$

Le paramètre p permet de plus ou moins renforcer l'importance des α-coupes de niveau élevé dans la mesure résumant par un degré une valeur de vérité généralisée S définie sur comme un ensemble sur l'intervalle [0, 1]. La figure 3 est représentation graphique de S et de sa mesure $M_p(S)$.

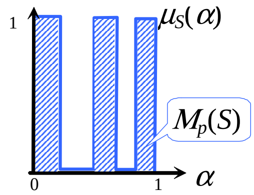

Figure 3. *Représentation graphique d'une valeur de vérité généralisée S et de sa mesure $M_p(S)$*

3.1.3 *Relation d'ordre graduelle et implication floue*

La relation d'ordre graduelle $\geq_g$ possède la particularité de généraliser des implications floues qui, elles-mêmes, généralisent la notion d'implication usuelle en satisfaisant un certain nombre d'axiomes comme la monotonie décroissante (resp. croissante) par rapport au premier (resp. second) argument, $(0 \Rightarrow_f a) = 1$, $(1 \Rightarrow_f 1) = 1$ ou $(1 \Rightarrow_f a) = a$. Par exemple, les trois implications floues $(a \Rightarrow_f b)$ suivantes sont couramment utilisées :

– l'implication de Lukasiewicz (1 si $a \leq b$, $1 - a + b$ sinon) ;
– l'implication de Godël (1 si $a \leq b$, b sinon) ;
– l'implication de Goguen (1 si $a \leq b$, b/a sinon).

L'idée développée ici est que, de même que la comparaison de deux degrés peut être interprétée comme une implication floue, la comparaison de deux nombres graduels peut être interprétée comme une implication floue généralisée. Une telle implication floue généralisée doit donc se réduire à une implication floue dans le cas particulier où les nombres graduels considérés représentent des degrés (un entier graduel peut être vu comme un degré a lorsqu'il prend la forme particulière $\{1/0, a/1\}$).

Pour montrer cette proposition, évaluons l'expression $\{1/0, a/1\} \leq_g \{1/0, b/1\}$ et vérifions la compatibilité du résultat avec une implication floue $a \Rightarrow_f b$.

Pour cela, on calcule la différence $\Delta = \{1/0, b/1\} \ominus \{1/0, a/1\}$.

Si $a \leq b$, Δ est l'entier relatif graduel noté en représentation canonique : $\{1/0, b/1, a/0\}^c$. Toutes ses coupes appartiennent à $\mathbb{Z}^+$, on en déduit que la mesure de la satisfaction globale du prédicat ($\Delta \geq_g 0$) est 1, ce qui est cohérent avec l'évaluation de $a \Rightarrow_f b$.

Si $a > b$, Δ est l'entier relatif graduel dont la représentation canonique est $\{1/0, a/\text{-}1, b/0\}^c$. La satisfaction globale de $\{1/0, a/1\} \leq_g \{1/0, b/1\}$ (ou $\Delta \geq_g 0$) peut se représenter graphiquement par l'ensemble S particulier de la figure 4.

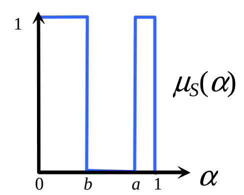

Figure 4. *Satisfaction globale de* $\{1/0, a/1\} \leq_g \{1/0, b/1\}$

La mesure $M_1(S) = 1 - a + b$ est homogène avec le résultat habituellement obtenu par l'évaluation de $a \Rightarrow_f b$ avec $\Rightarrow_f$ l'implication floue de Lukasiewicz. La mesure $M_2(S) = (1 - a^2 + b^2)^{1/2}$ est, quant à elle, homogène avec l'implication dite quadratique, variante de l'implication de Lukasiewicz.

De façon plus générale, une classe importante d'implications floues se définit par $(1\text{-}\ a^p + b^p)^{1/p}$ quand $a > b$, 1 sinon (Whalen, 2003). Dans le cas limite de p tendant vers $+\infty$, on retrouve l'implication de Godël. Quand p tend vers 0, on retrouve l'implication dite de Goguen. La méthode de construction d'une mesure paramétrée M_p que nous avons présentée permet, d'une part, de retrouver ces résultats et, d'autre part, d'en proposer une généralisation s'appuyant sur une sémantique clairement définie. Cette méthode est basée sur la comparaison de nombres graduels quelconques produisant une valeur de vérité généralisée (satisfaction globale) qui peut être, si besoin, résumée en un degré par une mesure M_p.

Ainsi une relation d’ordre sur des quantités graduelles peut être vue comme une implication floue généralisée. Ce résultat est important car il s’inscrit dans notre démarche de construction du concept de multi-ensemble flou comme généralisation à la fois du concept d’ensemble flou et du concept de multi-ensemble. En effet, les opérateurs sur les ensembles flous, basés sur des opérations sur des degrés, et les opérateurs sur les multi-ensembles, basés sur des opérations sur des entiers, peuvent être vus comme des cas particuliers d’opérateurs sur les multi-ensembles flous, basés sur des entiers graduels. De manière analogue, la relation d’ordre sur des entiers graduels, sous-jacente à une inclusion dans le cadre des multi-ensembles flous, généralise, d’une part, une implication floue entre degrés et, d’autre part, une relation d’ordre sur les entiers. Le lien entre la relation d’ordre sur les entiers et celle sur les entiers graduels est assez facile à établir et nous ne le développerons pas dans ce papier.

3.1.4 *Négation d’une satisfaction globale*

La notion d’entier graduel généralise à la fois la notion d’entier et celle de degré. Un degré a peut s’exprimer sous forme d’un nombre graduel par $\{1/0, a/1\}$.

L’implication floue $1 \Rightarrow_f a$ (dont la valeur est a) correspond à l’évaluation d’une relation d’ordre entre deux nombres graduels (i.e. $\{1/0, 1/1\} \leq_g \{1/0, a/1\}$) dont la satisfaction globale, notée S_a, est un ensemble tel que : $\mu_{S_a}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0, a]$; $\mu_{S_a}(\alpha) = 0$ sinon (cf. figure 5).

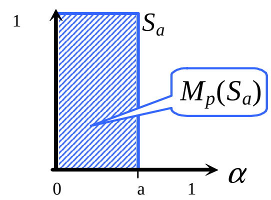

Figure 5. *Degré interprété comme une mesure de satisfaction globale*

On vérifie que la mesure M_p de l’ensemble S_a est bien égale à a puisque :

$$M_p(S_a) = [\int_0^1 \mu_{S_a}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha]^{1/p} = a\ .$$

La négation d’un degré a peut également se définir à l’aide d’une implication floue par : $a \Rightarrow_f 0$. Ainsi la négation de a s’interprète comme une mesure M_p de la satisfaction globale $\overline{S}_a$ telle que : $\mu_{\overline{S}_a}(\alpha) = 0$ si $\alpha \in\ ]0, a]$; $\mu_{\overline{S}_a}(\alpha) = 1$ sinon (cf. figure 6).

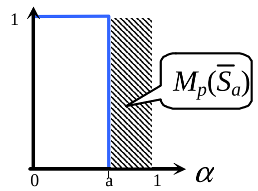

Figure 6. *Négation du degré a vue comme une intégrale.*

Cette mesure $M_p(\overline{S}_a)$ permet de retrouver une définition générale de la négation d'un degré a :

$$M_p(\overline{S}_a) = [\int_0^1 \mu_{\overline{S}_a}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha]^{1/p} = [1 - a^p]^{1/p}\ . \qquad [3]$$

En prenant p = 1 on retrouve la négation standard. Cette définition est générale et s'applique également lorsque S_a est une satisfaction globale quelconque représentée par un ensemble sur [0, 1].

3.2 *Relation d'ordre graduelle tolérante*

La relation d'ordre $\geq_g$ entre nombres graduels, définie en section 3.1, est graduelle dans le sens où elle permet de retourner une valeur de vérité entre 0 et 1, évaluant dans quelle mesure la relation est satisfaite. Cependant, cette relation est fondée sur des comparaisons non floues entre α-coupes, nous étudions maintenant une relaxation floue de cette relation d'ordre graduelle que nous notons $\geq_{gT}$. L'objectif est de comparer deux quantités graduelles x et y ($x \geq_{gT} y$) en introduisant une idée de tolérance graduelle dans la mesure des écarts $\Delta_\alpha = x_\alpha - y_\alpha$. Ainsi, on autorise, dans une certaine mesure, des écarts légèrement négatifs pour certaines α-coupes, la relation d'ordre tolérante construite est alors mieux satisfaite que la relation d'ordre graduelle qu'elle relaxe. Cette tolérance peut s'exprimer au moyen d'un ensemble flou T, par exemple l'ensemble flou "au moins 0" suivant :

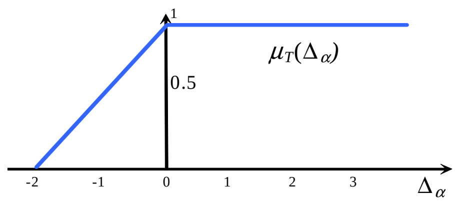

Figure 7. *Prédicat au moins 0 avec tolérance*

Alors que dans le cas de la relation graduelle $\geq_g$ la satisfaction de chaque Δ_α était soit 0, soit 1, celle-ci est maintenant comprise entre 0 et 1, compte tenu de la tolérance T. Pour les quantités graduelles x et y décrites dans la sous-section 3.1.1 et la tolérance T décrite par la figure 7, la satisfaction globale S de $x \geq_{gT} y$, est un *ensemble flou* dont la fonction caractéristique μ_S est telle que $\mu_S(\alpha) = \mu_T(\Delta_\alpha)$. La mesure de cette satisfaction globale S peut s'exprimer au moyen de l'intégrale pondérée définie par [2], ce qui conduit à évaluer le degré satisfaction $M_p(S)$ de la relation $x \geq_{gT} y$ (voir figure 8).

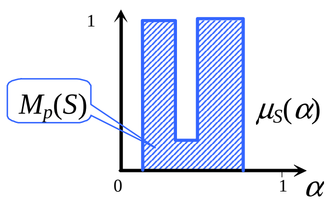

Figure 8. *Mesure de la satisfaction globale S de* $x \geq_{gT} y$

Exemple 3.1. L'utilisation de quantités graduelles et de relations d'ordre sur ces quantités, rend possible le traitement de requêtes flexibles sur une base de données usuelle comportant des prédicats sur des cardinalités d'ensembles flous. À titre d'exemple nous traitons la requête suivante : *trouver les entreprises dont le nombre des employés jeunes est supérieur à celui des employés proches de la retraite.*

Pour traiter cette requête, supposons qu'une entreprise X de la base de données ait dix employés $x_1, \ldots, x_{10}$ dont les âges respectifs sont : 25, 30, 35, 40, 42, 43, 48, 48, 55, 60 et que les concepts *employé jeune* et *proche de la retraite* soient définis par les ensembles flous sur les âges décrits par la figure 9.

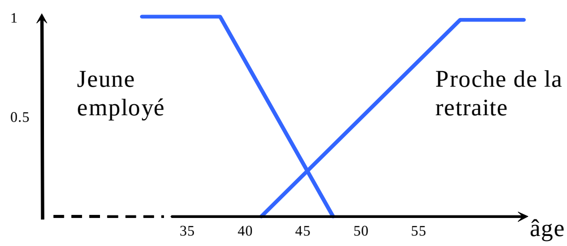

Figure 9. *Les prédicats flous jeune et proche de la retraite*

Compte tenu de ces prédicats l'ensemble flou des employés jeunes correspond à $\{1/x_1,\ 1/x_2,\ 1/x_3,\ 0.5/x_4,\ 0.3/x_5,\ 0.2/x_6\}$ et l'ensemble des employés proches de la retraite est {0.15/x_5, 0.2/x_6, 0.55/x_7, 0.55/x_8, 1/x_9, 1/x_{10}}. Les cardinalités respectives de ces ensembles flous sont : $\{1/3, 0.5/4, 0.3/5, 0.2/6\}^c$ et $\{1/2, 0.55/4, 0.2/5, 0.15/6\}^c$. Pour comparer ces deux nombres on évalue leur différence qui est : $\{1/1, 0.55/\text{-}1, 0{,}5/0, 0.3/1, 0.2/0\}^c$. Ce résultat signifie que le prédicat p_0 = *nombre d'employés jeunes* $\geq_g$ *nombre d'employés proches de la retraite* est complètement satisfait si l'on considère des α-coupes appartenant à]0, 0.5] ∪]0.55, 1], ce qui définit la satisfaction globale S_{p_0} du prédicat p_0. La mesure M_p de cette satisfaction globale, en considérant que plus les employés sont jeunes ou proches de la retraite plus il est important que le nombre des premiers soit supérieur au nombre des seconds est (avec $p = 2$) :

$$M_2(S_{p_0}) = (\int_0^1 \mu_{S_{p_0}}(\alpha)\ 2\alpha\ d\alpha)^{1/2} = \sqrt{0.25 + 0.69} = 0.97.$$

On détermine ainsi dans quelle mesure l'entreprise *X* a plus d'employés jeunes que d'employés proches de la retraite. De cette manière, à partir d'une base d'entreprises, on peut sélectionner les entreprises satisfaisant plus ou moins le critère de sélection et les ordonner par rapport à leur niveau d'adéquation. ♦

4. Prise en compte d'expressions quantifiées

Les nombres graduels ($\mathbb{N}_f$, $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Q}_f$) que nous avons présentés en section 2 offrent un cadre général pour évaluer des expressions quantifiées. Les quantificateurs flous ont été introduits par Zadeh afin de généraliser les quantificateurs universel et existentiel usuels. On distingue les quantificateurs absolus exprimant un nombre (*environ 3*, *au moins 2*) ou relatifs référençant une proportion (*la plupart*, *environ la moitié*). Les expressions quantifiées sont de type "*Q X* sont *A*" lorsqu'il s'agit d'évaluer dans quelle mesure *Q éléments de X sont A*, comme dans *environ 3 employés sont bien payés*. Elles se généralisent en "*Q B X* sont *A*" où l'ensemble de référence *B X* est flou comme dans *la plupart des employés jeunes sont bien payés* (où *B* est le prédicat flou *jeune*).

L'évaluation d'expressions quantifiées a donné lieu à de nombreuses propositions. On en trouve des études détaillées dans (Delgado *et al.*, 2000 ; Glökner, 2004). Les plus importantes sont celles basées sur l'opérateur OWA (Yager, 1998) et sur les cardinalités FGCount qui s'interprètent respectivement comme des intégrales de Choquet et de Sugeno (Liétard, 1995). Ces deux approches délivrent un degré de satisfaction mais sont limitées à des expressions utilisant des quantificateurs croissants. Une approche basée sur la notion de nombres graduels et de relations d'ordre graduelles, n'impose pas d'hypothèse particulière sur la monotonie du quantificateur linguistique et généralise l'approche avec des OWA.

Dans la suite, nous rappelons d'abord la notion de quantificateur et l'interprétation d'une expression quantifiée au moyen d'un opérateur OWA. Puis nous montrons comment les outils relatifs aux nombres graduels permettent de fournir une interprétation assez simple et naturelle des expressions comportant un quantificateur absolu ou relatif.

4.1 *Quantificateurs linguistiques et approche OWA*

Deux sortes de quantificateurs flous peuvent être distinguées : les quantificateurs absolus, comme *environ 2*, *au moins 3*…, et les quantificateurs relatifs se référant à des proportions, comme *environ la moitié*, *au moins un quart*… Ces quantificateurs peuvent être croissants (resp. décroissants) ce qui signifie qu'un accroissement de satisfaction de la condition *A* ne peut faire décroître (croitre) la satisfaction de la proposition "*Q X* sont *A*". *Au moins 3* et *presque tous* sont des exemples de quantificateurs croissants. Un quantificateur est monotone s'il est soit croissant, soit décroissant. On trouve également des quantificateurs unimodaux qui font référence à des prédicats graduels comme *environ 4* ou *environ la moitié*. Les quantificateurs absolus sont modélisés par des ensembles flous sur les réels (voir figure 10) alors que les quantificateurs relatifs correspondent à des ensembles flous sur [0, 1].

L'interprétation de "*Q X* sont *A*", avec *Q* croissant, au moyen d'un opérateur OWA est donnée par :

$$\text{OWA} = \sum_{i=1}^{n} w_i \times \mu_A(x_i),$$

où les degrés d'appartenance à *A* sont ordonnés de manière décroissante ($\mu_A(x_1) \geq \mu_A(x_2) \geq \ldots \geq \mu_A(x_n)$). Pour un quantificateur absolu les poids $w_i = \mu_Q(i) - \mu_Q(i\text{-}1)$, expriment l'accroissement de satisfaction lorsqu'on compare une situation comportant i-1 éléments entièrement *A* avec une situation comportant i éléments entièrement *A*. Pour un quantificateur relatif, les poids $w_i = \mu_Q(i/n) - \mu_Q((i\text{-}1)/n)$, avec n la cardinalité de l'ensemble *X*, expriment l'accroissement de satisfaction de la quantification lorsque la proportion des éléments de *X* satisfaisant complètement *A* passe de i-1/n à i/n.

Exemple 4.1. Avec la méthode de Yager, évaluons la requête *trouver les entreprise X dont au moins 3 employés sont bien payés*. *Q* est le quantificateur absolu *au moins 3*, défini par exemple par la figure 10. Soit l'entreprise *X* dont l'ensemble des employés est $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Supposons que les satisfactions des employés x_i au prédicat *A* définissant la condition *bien-payé* sont : $\mu_A(x_1) = 1$, $\mu_A(x_2) = 1$, $\mu_A(x_3) = 0.8$, $\mu_A(x_1) = 0.6$. Il en découle que les poids w_i sont :

$$w_1 = 0,\ w_2 = 0.5,\ w_3 = 0.5,\ w_4 = 0,$$

et que la satisfaction de la proposition "au moins 3 *X* sont *A*" est :

$$\text{OWA} = 0 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0.8 + 0 \times 0.6 = 0.9.$$

Ce degré traduit que l'entreprise X considérée n'est pas complètement satisfaisante car seuls 2 employés sont complètement bien payés. Cependant X n'est pas pour autant rejetée (elle est même presque satisfaisante) car 2 autres employés sont considérés comme bien-payés avec des degrés élevés (0.8, 0.6). L'entreprise X est donc sélectionnée avec un degré de satisfaction de 0.9.

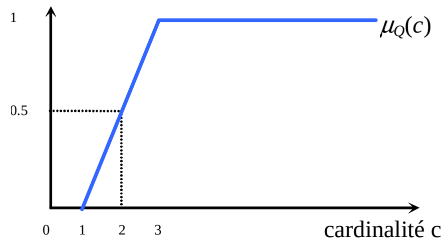

Figure 10. *Le quantificateur "au moins 3".* ♦

4.2 *Interprétation d'une expression quantifiée basée sur des quantités graduelles*

L'interprétation d'une expression quantifiée, comme *au moins 3 employés sont bien payés*, peut s'appuyer sur une approche basée sur les nombres graduels. Il suffit de considérer la cardinalité floue de l'ensemble des employés bien payés (notée $|X_{bp}|$) et de la comparer à l'entier 3 au moyen d'une relation d'ordre graduelle associée à une fonction de tolérance T (comme celle décrite par la figure 7). On évalue donc : $|X_{bp}| \geq_{gT} 3$. Cela consiste à filtrer les différentes α-coupes de $|X_{bp}| - 3$ au moyen de la fonction T. Le résultat est alors une satisfaction globale S dont il est ensuite possible d'évaluer différents résumés en appliquant une mesure M_p. Si on choisit $p = 1$, $M_1(S)$ correspond au résultat délivré par l'opérateur OWA.

Exemple 4.2. Reprenons les données de l'exemple 4.1. L'évaluation de l'expression *au moins 3 employés sont bien payés*. La cardinalité des employés bien-payés est : $|X_{bp}| = \{1/2, 0.4/3, 0.1/4\}^c$. En considérant la fonction de tolérance de la figure 7, l'évaluation de $|X_{bp}| \geq_{gT} 3$ conduit à la satisfaction globale décrite par la figure 11.

En appliquant une mesure M_1 sur la satisfaction globale S, on obtient un degré qui peut être vu comme un résumé de la quantification considérée. L'utilisation d'une mesure M_1 conduit à interpréter la relation d'ordre graduelle tolérante sous-jacente comme une implication floue de Lukasiewicz généralisée. Le résultat obtenu correspond à celui issu de l'application de l'opérateur OWA.

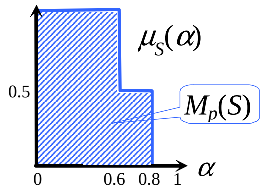

Figure 11. *Satisfaction globale S de "au moins 3 employés sont bien payés"* ♦

L'utilisation d'une mesure M_1 attribue une même importance à chaque α-coupe. Mais d'autres mesures M_p sont envisageables. Elles permettent de traduire la sémantique *plus un grand nombre d'α-coupes de haut niveau sont satisfaites plus globalement la quantification considérée est satisfaite*. Pour cela, il suffit de choisir une mesure M_p avec un paramètre p supérieur à 1, ce qui permet d'attribuer une importance plus grande aux α-coupes de degré élevé. De cette manière, on considère que les quantités issues du décompte des éléments les plus significatifs (parce que les plus satisfaisants) doivent d'autant plus respecter la relation d'ordre sous-jacente à la quantification traitée.

Cette méthode s'applique également sans difficulté pour évaluer une expression quantifiée dont le quantificateur est relatif, comme dans *plus de la moitié des employés sont bien payés*. Il suffit de travailler sur $\mathbb{Q}_f$ et de calculer le nombre rationnel graduel r représentant le ratio de la cardinalité floue des employés bien payés par la cardinalité des employés, puis d'évaluer la relation $r \geq_{gT} 1$, avec une relation de tolérance T adaptée au quantificateur Q. Le bilan de cette comparaison est une satisfaction globale dont une approximation dans l'intervalle [0, 1] peut être évaluée par application d'une mesure M_p.

Plus généralement, l'évaluation d'une expression du type "*Q B X* sont *A*", comme *la plupart des employés jeunes sont bien payés*, se fait en calculant le nombre rationnel graduel correspondant au ratio de la cardinalité floue des employés jeunes et bien payés sur la cardinalité floue des employés jeunes. Plus il y a d'employés jeunes qui sont bien payés plus ce ratio est proche de 1. La méthode employée est donc similaire à celle utilisée pour évaluer les expressions "*Q X* sont *A*".

Exemple 4.3. On s'intéresse à la requête trouver *les entreprises dont la plupart des employés jeunes sont bien payés.* Cette requête, du type "*Q B X* sont *A*" où *Q* est un quantificateur relatif, se traite en évaluant la proportion du nombre d'employés *jeunes et bien payés* par rapport au nombre d'employés *jeunes*. Plus ce rapport est proche de 1, plus la plupart des employés jeunes sont bien payés. Quand le rapport vaut 1, tous les employés jeunes sont bien payés.

On réalise donc, dans $\mathbb{Q}_f$, la division entre deux cardinalités floues. Le quotient obtenu est ensuite comparé à 1, c'est-à-dire que la quantité graduelle quotient est filtrée par un prédicat flou "presque 1" préalablement spécifié, par exemple, par la figure 12.

Ainsi, supposons que la cardinalité de l'ensemble flou des employés *jeunes* est $\{1/2, 0.4/3, 0.1/4\}^c$. Le rapport du nombre d'employés *jeunes et bien payés* sur le nombre d'employés *jeunes* est le nombre rationnel graduel représenté par : $\{1/1{:}2, 0.4/2{:}3, 0.2/1\}^c$.

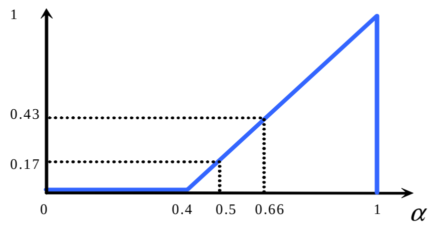

Figure 12. *Prédicat flou presque 1*

En évaluant ce rapport en fonction du prédicat presque 1, nous en déduisons une satisfaction globale *S* qui est représentée graphiquement par la figure 13 :

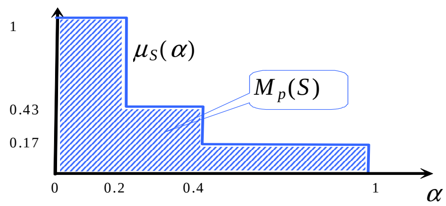

Figure 13. *Satisfaction S du prédicat presque 1 appliqué à* $\{1/1{:}2, 0.4/2{:}3, 0.2/1\}^c$

Cette satisfaction peut se résumer par $M_2(S)$:

$$M_2(S) = \left(\int_0^1 \mu_S(\alpha) * 2\alpha * d\alpha\right)^{1/2} = \sqrt{0.23} = 0.48. \blacklozenge$$

Le point clé de la méthode proposée est d'exprimer la satisfaction d'une expression quantifiée non pas sous la forme d'un degré mais sous la forme d'une *satisfaction globale S* représentée par un ensemble flou sur [0, 1] qui peut être vue comme une *valeur de vérité généralisée*. Cet ensemble flou décrit *précisément et complètement* la manière dont la proposition est satisfaite.

Ainsi, notre méthode généralise l'approche OWA et définit une technique unifiée pour traiter des expressions quantifiées de type "*Q X* sont *A*" et "*Q B X* sont *A*". Elle se base, dans un premier temps, sur la comparaison de nombres graduels conduisant à faire émerger une satisfaction globale reflétant exactement la manière dont une proposition est satisfaite. Vient ensuite un processus de "*defuzzification*" où différentes techniques peuvent être utilisées selon le choix d'une mesure M_p.

5. Compositions de prédicats portant sur des quantités graduelles

Nous analysons dans cette section comment des prédicats portant sur des relations d'ordre entre quantités graduelles et générant des valeurs de vérité généralisées peuvent être composés. Cela nous conduit, en 5.1 et 5.2, à généraliser les opérateurs de disjonction et de conjonction sur de telles valeurs de vérité. La sous-section 5.3 illustre ce propos au travers de quelques exemples simples. Enfin, en 5.4, nous soulignons l'intérêt de notre démarche en la confrontant à la méthode utilisée par Zadeh pour définir la cardinalité floue appelée FECount.

5.1 *Disjonction*

Dans l'intervalle [0, 1], une conorme triangulaire (ou t-conorme), notée $\vee$, est un opérateur binaire généralisant la disjonction. Il existe un grand nombre de t-conormes parmi lesquelles la conorme standard *max* est la plus petite. Nous examinons ci-après, comment généraliser une t-conorme pour composer des valeurs de vérité généralisées.

Considérons deux degrés de satisfaction a et b, avec $b \leq a$. Un degré t peut être représenté par une valeur de vérité généralisée S_t qui un ensemble sur [0, 1], tel que $\mu_{S_t}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0, t]$, $\mu_{S_t}(\alpha) = 0$. Les degrés a et b peuvent être respectivement représentés par des valeurs de vérité généralisées S_a et S_b. La t-conorme standard, max(a, b), peut être représentée par $S_a \cup S_b$, qui vaut S_a, et dont la mesure M_p est a. Une telle mesure évalue le nombre d'α-coupes satisfaites dans S_a ou dans S_b.

Les t-conormes strictement monotones distinguent par exemple $\vee(0.8, 0.6)$ de $\vee(0.8, 0.2)$ en "favorisant" la première proposition par rapport à la seconde, cette dernière étant elle-même plus grande que max(0.8, 0.2). De même, il est possible de définir des mesures de $S_a \cup S_b$ basées sur une notion d'intégrale pondérée et traduisant cette sémantique générale des t-conormes. Pour cela, il suffit de tenir compte positivement des α satisfaits dans S_a ou dans S_b auquel on ajoute un "bonus" en tenant compte des α satisfaits à la fois dans S_a et dans S_b. On note M_p^* ces mesures de $S_a \cup S_b$. La figure 14 illustre graphiquement cette interprétation des t-conormes lorsque des degrés a, b ou c sont respectivement représentés par des satisfactions globales S_a, S_b et S_c, que $b \leq c$ et donc que $\vee(a, b) \leq \vee(a, c)$.

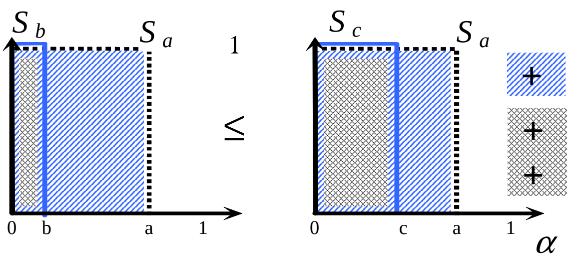

Figure 14. *Interprétation de conormes à l'aide d'intégrales*

Sur la figure 14, la mesure $M^*_p(S_a \cup S_b)$ correspond à une évaluation des surfaces notées ++ et +. Dans le cas particulier de satisfactions globales S_a et S_b représentant des degrés, la mesure M^*_p de la satisfaction $S_a \cup S_b$ s'exprime par :

$$M^*_p(S_a \cup S_b) = \min(1, (a^p + b^p)^{1/p})$$

qui est l'expression générale d'une conorme archimédienne en utilisant un générateur croissant de la forme x^p ($p \geq 0$) (Klement *et al.*, 2004).

Une généralisation de cette notion de co-norme est obtenue en considérant des valeurs de vérité généralisées S_a et S_b quelconques obtenues lorsque des quantités graduelles sont comparées au moyen de relations d'ordre graduelles tolérantes. $M^*_p(S_a \cup S_b)$ se définit alors en tenant compte des α satisfaits dans S_a ou dans S_b et des α satisfaits à la fois dans S_a et dans S_b (figure 15).

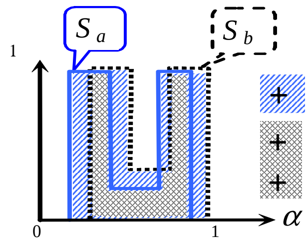

Figure 15. *Généralisation d'une t-conorme*

Ce comportement se traduit formellement par :

$$M^*_p(S_a \cup S_b) = \min(1, \left(\left[\int_0^1 \mu_{S_a \cup S_b}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha\right] + \left[\int_0^1 \mu_{S_a \cap S_b}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha\right]\right)^{1/p})$$

En choisissant une intersection standard $\mu_{S_a \cap S_b}(\alpha) = \min(\mu_{S_a}(\alpha), \mu_{S_b}(\alpha))$ et l'union standard $\mu_{S_a \cap S_b}(\alpha) = \max(\mu_{S_a}(\alpha), \mu_{Sb}(\alpha))$ pour combiner les ensembles flous S_a et S_b, l'expression se réduit à :

$$M_p^*(S_a \cup S_b) = \min(1, \left(\int_0^1 (\mu_{S_a}(\alpha) + \mu_{S_b}(\alpha))\ \ p\ \alpha^{p-1}\ \ d\alpha\right)^{1/p}). \qquad [4]$$

5.2. *Conjonction*

Dans l'intervalle [0, 1], une norme triangulaire (ou t-norme), notée $\wedge$, généralise la conjonction. Les t-normes sont étendues aux valeurs de vérité généralisées en suivant une approche semblable à celle suivie pour les t-conormes en 5.1.

La t-norme standard, min(a, b), est la plus grande des normes triangulaires. Elle peut être représentée par la mesure M_p de la satisfaction globale $S_a \cap S_b$. Une telle mesure évalue le nombre d'α-coupes satisfaites à la fois dans S_a et dans S_b.

Les t-normes strictement monotones permettent de distinguer $\wedge$(0.5, 1) de $\wedge$(0.5, 0.8) en "pénalisant" la seconde proposition par rapport à la première. De même, il est possible de définir des mesures M_p^* de $S_a \cap S_b$ traduisant une telle sémantique. Ces mesures comptent positivement les α satisfaits à la fois dans S_a et dans S_b et négativement les α satisfaits ni dans S_a et ni dans S_b, ces dernières introduisant une pénalité. La figure 16 illustre graphiquement cette interprétation.

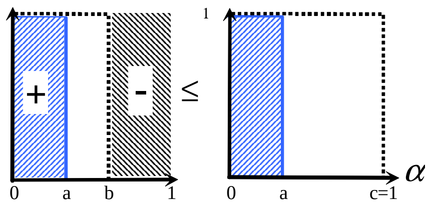

Figure 16. *Interprétation de t-normes à l'aide d'intégrales*

Dans le cas particulier de satisfactions globales S_a et S_b représentant des degrés (avec $a \leq b$), la mesure M_p^* de la satisfaction $S_a \cap S_b$ s'exprime par :

$$M_p^*(S_a \cap S_b) = \max(0, \left(a^p - \left(1 - b^p\right)\right)^{1/p}) = \max(0, \left(a^p + b^p - 1\right)^{1/p}).$$

qui est l'expression de la famille de t-normes de Schweizer-Sklar (Schweizer et *al.*, 1963 ; Klement et *al.*, 2004).

La généralisation de la mesure M_p^* de $S_a \cap S_b$, lorsque S_a et S_b sont des satisfactions globales quelconques, est schématisée par la figure 17. Elle évalue de façon positive les parties communes de S_a et S_b et de façon négative les parties non couvertes par S_a ou S_b.

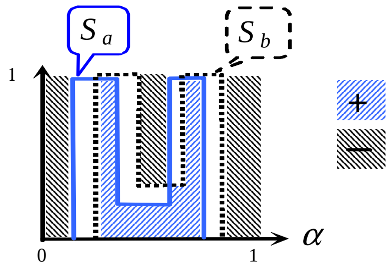

Figure 17. *Généralisation d'une t-norme*

L'expression suivante traduit un tel comportement :

$$M_p^*(S_a \cap S_b) = \max(0, \left(\left[\int_0^1 \mu_{S_a \cap S_b}(\alpha)\, p\alpha^{p-1}\, d\alpha\right] - \left[\int_0^1 \mu_{\overline{S_a \cup S_b}}(\alpha)\, p\alpha^{p-1}\, d\alpha\right]\right)^{1/p}).$$

Par ailleurs, en choisissant une intersection standard (min), l'union standard (max) et le complément standard $\mu_{\overline{S}}(\alpha) = 1 - \mu_S(\alpha)$ pour combiner les ensembles flous représentant des satisfactions globales, on obtient :

$$M_p^*(S_a \cap S_b) = \max(0, \left(\int_0^1 (\mu_{S_a}(\alpha) + \mu_{S_b}(\alpha) - 1)\, p\alpha^{p-1}\, d\alpha\right)^{1/p}). \qquad [5]$$

5.3. *Requêtes flexibles comportant des prédicats composés sur des quantités graduelles*

Nous illustrons maintenant l'utilisation des opérateurs de conjonction étendus à des valeurs de vérité généralisées pour construire des opérateurs d'égalité entre quantités graduelles.

Exemple 5.1. On cherche les entreprises X ayant 2 employés *jeunes et bien payés*. Cette requête est une sélection sur un critère comparant la cardinalité C des employés jeunes et bien payés à l'entier 2. Ce critère peut être défini en évaluant la conjonction $(C \leq_g 2) \wedge (C \geq_g 2)$.

Supposons que l'ensemble des employés *jeunes et bien-payés* soit $\{1/x_1, 0.2/x_2, 0.4/x_3, 0.1/x_4\}$, sa cardinalité C est $\{1/1, 0.4/2, 0.2/3, 0.1/4\}^c$. La différence entre cette cardinalité et 2 est l'entier relatif graduel : $\{1/\text{-}1, 0.4/0, 0.2/1, 0.1/2\}^c$.

Considérons le prédicat $p_1 = C \geq_g 2$ et le prédicat $p_2 = C \leq_g 2$. La méthode suivie consiste à évaluer l'intersection des satisfactions globales de chacun des sous-critères $(S_{P_1} \cap S_{P_2})$ puis à appliquer une mesure M_p^* afin d'en extraire un degré.

La satisfaction globale S_{P_1} est l'ensemble flou tel que : $\forall\ \alpha \in\ ]0, 0.4]$, $\mu_{S_{P_1}}(\alpha)$ = 1 et $\mu_{S_{P_1}}(\alpha)$ = 0 sinon. La satisfaction globale S_{P_2} est l'ensemble flou défini par $\forall\ \alpha \in\ ]0, 0.2]$, $\mu_{S_{P_2}}(\alpha)$ = 0 et $\mu_{S_{P_2}}(\alpha)$ = 1 sinon. L'ensemble flou $S_{P_1} \cap S_{P_2}$ est l'ensemble flou $\forall\ \alpha \in\ ]0.2, 0.4]$, $\mu_{S_{P_1} \cap S_{P_2}}(\alpha)$ = 1 et $\mu_{S_{P_1} \cap S_{P_2}}(\alpha)$ = 0 sinon.

Avec p = 2, la formule [5] conduit à :

$$M_2^*(S_{p_1} \cap S_{p_2}) = \max(0, \left(\int_0^1 (\mu_{Sp1}(\alpha) + \mu_{Sp2}(\alpha) - 1)\, p\alpha^{p-1}\, d\alpha\right)^{1/p})$$

$$= (\left[\alpha^2\right]_{0.2}^{0.4})^{1/2} = 0.34$$

Ainsi, il est possible de filtrer les entreprises d'une base de données et de les ordonner en fonction de leur niveau d'adéquation au critère de sélection. Ici 0.34 représente dans quelle mesure l'entreprise X observée a exactement 2 employés jeunes et bien payés.

On note que contrairement au traitement de la composition de conditions comportant des *nombres flous* "usuels" représentant des données mal connues (modélisées par des distributions de possibilité), il n'est ici pas nécessaire de faire d'hypothèses particulières sur l'indépendance des critères. Ainsi, dans cet exemple, l'entier graduel C (modélisé par un ensemble flou) est traité dans sa globalité et indépendamment dans p_1 et dans p_2. Par contre, si C avait été une donnée mal connue, le choix d'une valeur possible de C dans l'évaluation du prédicat p_1 aurait imposé le choix de la même valeur possible dans le traitement de p_2.

Exemple 5.2. La démarche suivie dans l'exemple 5.1 peut s'appliquer pour déterminer dans quelle mesure le nombre d'employés jeunes et bien payés est *environ 2*. On interprète *environ 2* comme une conjonction de prédicats ($C \leq_{gT} 2$) $\wedge$ ($C \geq_{gT} 2$) basés sur une relation d'ordre graduelle tolérante $x \geq_{gT} y$ qui est complètement satisfaite si $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$ et satisfaite au degré 0.5 si $x_\alpha - y_\alpha = -1$. Les satisfactions globales de chacun de ces prédicats sont graphiquement représentées par la figure 18.

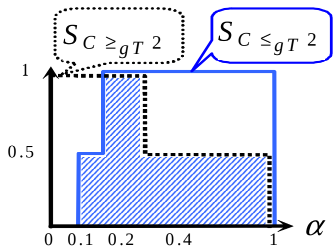

Figure 18. *Satisfaction globale de ($C \leq_{gT} 2$) et ($C \geq_{gT} 2$)*

On en déduit dans quelle mesure *environ 2* employés sont *jeunes* et *bien payés*. En appliquant la formule [5] avec $p = 2$, on obtient :

$$M_p^*(S_{C\geq_{gT}2} \cap S_{C\leq_{gT}2}) = [0.5(1-0.4^2)+1(0.4^2-0.2^2)+0.5(0.2^2-0.1^2)]^{1/2}$$
$$= 0.74.$$

5.4. *Sur l'interprétation de la cardinalité FECount*

Montrons l'intérêt de notre démarche en analysant l'interprétation d'une cardinalité floue d'un ensemble flou E caractérisée par la fonction FECount(E) = FGCount(E) $\cap$ FLCount(E) (Zadeh, 83).

La fonction FGCount(E), définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mu_{\text{FGCount}(E)}(n) = sup\{\alpha \,/\, |E_\alpha| \geq n\}$, est une caractérisation de la cardinalité floue d'un ensemble flou E. Le degré α associé à un entier n de FGCount(E) évalue dans quelle mesure E contient *au moins n* éléments.

La fonction FLCount(E) est telle que $\mu_{\text{FLCount}(E)}(n) = 1 - \mu_{\text{FGCount}(E)}(n+1)$. C'est une autre caractérisation de la cardinalité floue d'un ensemble flou E. Le degré α associé à un entier n de FLCount(E) évalue dans quelle mesure E contient *au plus n* éléments (*i. e.* : il n'y en a pas au moins n+1).

Examinons les cardinalités floues de l'ensemble E des personnes blondes défini par {1/John, 0.5/Mike, 0.5/Peter}. Nous obtenons :

FGCount(E) = {1/0, 1/1, 0.5/2, 0.5/3} ;

FLCount(E) = {0/0, 0.5/1, 0.5/2, 1/3, 1/4, …}.

En définissant la fonction FECount(E) = FGCount(E) $\cap$ FLCount(E) nous obtenons :

FECount(E) = {0.5/1, 0.5/2, 0.5/3}.

Le degré d'appartenance d'un entier n dans FECount(E) devrait décrire dans quelle mesure l'ensemble E contient *exactement n* personnes. Cependant, dans ce cas particulier, le degré associé à 2 dans FECount(E) vaut 0.5, alors que, comme cela est souligné dans (Delgado, 2002), aucune α-coupe de E ne comporte 2 éléments. En conséquence aucune interprétation plus ou moins relâchée du concept "blond" ne conduit à une cardinalité de 2 pour E.

En considérant maintenant $|E|$ = FGCount(E) comme un entier graduel, déterminons au moyen de notre méthode dans quelle mesure E contient 2 éléments ($|E| =_g 2$). La satisfaction globale de $|E| \geq_g 2$ est l'ensemble flou S_1 sur [0, 1] tel que : $\mu_{S_1}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0, 0.5]$, $\mu_{S_1}(\alpha) = 0$ sinon. La satisfaction globale de $|E| \leq_g 2$ est l'ensemble flou S_2 tel que : $\mu_{S_2}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0.5, 1]$, $\mu_{S_2}(\alpha) = 0$ sinon. Nous en déduisons que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et donc que, quelle que soit la mesure M_p utilisée pour résumer cette satisfaction globale, $M_p(S_1 \cap S_2) = 0$. Nous en concluons alors que la valeur de vérité de la proposition $|E| =_g 2$ est nulle.

Cette interprétation est correcte mais n'est pas cohérente avec la valeur de vérité 0.5 associée à l'élément 2 dans FECount(E). Analysons plus précisément les méthodes utilisées pour comprendre le problème qui se pose.

Tout d'abord, constatons que les degrés 1, 1, 0.5 et 0.5 du FGCount(E) correspondent à ceux obtenus en évaluant respectivement $M_1(|E| \geq_g 0)$, $M_1(|E| \geq_g 1)$, $M_1(|E| \geq_g 2)$ et $M_1(|E| \geq_g 3)$. De même, les degrés 0, 0.5, 0.5, 1, 1… de FLCount(E) sont ceux obtenus en évaluant $M_1(|E| \leq_g 0)$, $M_1(|E| \leq_g 1)$, $M_1(|E| \leq_g 2)$, $M_1(|E| \leq_g 3)$… Les fonctions FGCount et FLCount sont donc cohérentes avec la notion de relation d'ordre graduelle telle que nous l'avons définie et ont une interprétation en termes d'α-coupes. La difficulté posée par FECount vient donc de la composition de ces degrés.

En effet, FECount(E) provient de la combinaison FGCount(E) $\cap$ FECount(E) où l'élément 2 est associé à min(0.5, 0.5). Mais chacun de ces degrés 0.5 est en fait un *résumé* des satisfactions globales S_1 et S_2 reflétant des réalités bien différentes. Si $M_1(S_1) = 0.5$ et $M_1(S_2) = 0.5$, l'intersection de S_1 et S_2 est quant à elle vide, en conséquence la mesure $M_1(|E| =_g 2)$ est nulle, conformément à l'intuition.

On voit ici que la composition de résumés est à considérer avec prudence et qu'en particulier la fonction FECount n'a pas d'interprétation correcte en termes d'α-coupes.

5. Conclusion

Cette étude se place dans le contexte de l'interrogation flexible de bases de données usuelles. La prise en compte des multi-ensembles flous permet de manipuler conjointement des informations quantitatives et qualitatives sur les données. Leur définition, dans le cadre général des nombres entiers naturels graduels ($\mathbb{N}_f$) offre un cadre dans lequel les ensembles, ensembles flous, multi-ensembles et multi-ensembles flous sont traités de manière uniforme.

L'extension de $\mathbb{N}_f$ à $\mathbb{Z}_f$ puis $\mathbb{Q}_f$, introduit des généralisations structurelles pour lesquelles il est possible de définir des opérations de différence et de division exactes. De telles opérations ont de nombreuses applications et, notamment, elles permettent de traiter des requêtes comportant des quantificateurs absolus ou relatifs.

La démarche consiste à définir une relation d'ordre générique basée sur le calcul de l'écart entre deux nombres graduels et l'interprétation de celui-ci relativement à une fonction de tolérance. Considérant les différentes α-coupes, ceci produit un ensemble flou sur [0, 1] (appelé satisfaction globale) qui peut être vu comme une valeur de vérité généralisée. Il est ensuite possible de résumer cette valeur en un degré au moyen d'une mesure définie par une intégrale pondérée. Nous avons montré qu'une telle mesure généralise la notion d'implication floue. Ce principe de comparaison entre deux quantités graduelles est ensuite utilisé pour évaluer des requêtes prenant en compte des quantificateurs absolus. L'ensemble des nombres rationnels graduels ($\mathbb{Q}_f$) nous permet de définir des rapports entre quantités graduelles qu'il est ensuite possible de comparer. Nous traitons de cette manière des requêtes comportant des quantificateurs relatifs. Cette approche généralise la prise en compte d'expressions quantifiées par l'opérateur OWA et propose un traitement analogue pour traiter des requêtes quantifiées de type *Q X* sont *A* et *Q B X* sont *A*.

Ces propositions se poursuivent en analysant de quelle manière des prédicats comportant des relations d'ordre sur des quantités graduelles peuvent être composés au moyen d'opérateurs conjonctifs ou disjonctifs. Nous avons ainsi été amenés à proposer une généralisation des normes et conormes triangulaires de la logique multivaluée pour qu'elles s'appliquent à des critères sur des quantités graduelles produisant des valeurs de vérité généralisées.

Ce travail peut être complété en étudiant le comportement d'autres opérateurs d'agrégation, conjonctions et disjonctions pondérées ou moyennes. Par ailleurs, les mesures et les opérateurs de conjonction et disjonction les combinant sont basés sur une sémantique commune relative à l'importance attribuée aux α-coupes (même paramétrage *p*). Le problème de la combinaison de mesures basées sur des interprétations différentes liées aux importances des α-coupes (*i. e.* paramétrages *p* différents) se pose.

Pour terminer, nous remarquons que si cette étude a pour objectif de répondre à des problèmes liés à la manipulation de quantités dans le cadre de l'interrogation flexible de bases de données, sa portée va bien au-delà et des applications peuvent être trouvées dans d'autres domaines comme l'extraction de connaissances, la fusion ou les résumés d'information, la recherche d'information…

6. Bibliographie

Albert J., « Algebraic properties of bag data types », *17th Inter. Conf. On Very Large Data VLDB'91*, Barcelona, 1991, p. 211-219.

Blizard W. D., Generalizations of the concept of sets, a formal theory of multisets, PhD thesis, University of Oxford, 1985.

Bosc P., Pivert O., « SQLF : a relational database language for fuzzy querying », *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, 1995, p. 1-17.

Börzsöny S., Kossmann D., Stocker K., « The Skyline operator », *17th International. Conference On Data Engineering*, 2001, p. 421-430.

Casasnovas J., Torrens J., « An axiomatic approach to fuzzy cardinalities of fuzzy sets », *Fuzzy Sets and Systems*, 133, 2003, p. 193-209.

Connan F., Interrogation flexible de bases de données multimédia, Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 1999.

Chomicki J., « Preference formulas in relational queries », *ACM Transactions On Database Systems*, 27, 2003, p. 153-187.

Cross V., « Defining fuzzy relationships in object models: abstraction and interpretation », *Fuzzy Sets and Systems*, 140, (1) 16, 2003, p. 5-27.

Delgado M., Sanchez D., Martin-Bautista M., Amaparo V. M., « Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences», *International Journal of Approximate Reasoning*, 23, 2000, p. 23-66.

Delgado M., Sanchez D., Amaparo V. M., « A probabilistic definition of a nonconvex fuzzy cardinality », *Fuzzy Sets and Systems*, 126, 2002, p. 177-190.

Dubois D., Prade H., « Fuzzy cardinality and modelling of imprecise quantification », *Fuzzy Sets and Systems* , vol. 16, n°3, 1985, p. 199-230.

Dubois D., Prade H., « Fuzzy numbers: an overview », *Analysis of fuzzy information, Mathematics and Logics*, vol.I, 1987, p. 3-39.

Dubois D., Prade H « Scalar evaluations of fuzzy sets: overview and applications », *Appl. Math. Lett.*, vol. 3, n° 2, 1990, p. 37-42.

Dubois D., Prade H. « Fuzzy elements in a fuzzy set », *Proc. 10th International Fuzzy Systems Association (IFSA) Congress*, Beijing, 2005.

Glökner I., *Fuzzy quantifiers in natural language: semantics and computational models*. Der Andere Verlag, 2004.

Klement E. P., Mesiar R., Pap E., « Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 145, 2004, p. 411-438.

Knuth D. E., *The art of computer programming*, vol. 2, Addison Wesley, 1985.

Lamperti G. Melchiori M., Zanella M., « On multisets in database systems », *Multisets processing, Lecture Notes in Computer Science LNCS 2235*, Springer-Verlag, 2001, p. 147-215.

Liétard L., Contribution à l'interrogation flexible de bases de données : étude des propositions quantifiées floues, thèse de l'Université de Rennes 1, 1995.

Klement E., Mesiar R., Pap E., « Triangular norms. Position paper I: general constructions ans parametrized families », *Fuzzy sets and Systems*, 145, 2004, 411-438.

Kieβling W. Köstler G., « PreferenceSQL – Design, implementation, experiences », *28th International Conference On Very Large Data Bases* , 2002, p. 990-1001.

Miyamoto S., « Fuzzy Multisets and Fuzzy Clustering of Documents », *10th International Conference On Fuzzy Systems FUZZ IEEE'01*, 2001.

Rocacher D., « On fuzzy bags and their application to flexible querying », *Fuzzy Sets and Systems*, 140 (1), 2003, p. 93-110.

Rocacher D., Bosc P., « About $\mathbb{Z}_f$, the set of fuzzy relative integers, and the definition of fuzzy bags on $\mathbb{Z}_f$ », *Lecture Notes in Computer Science* LNCS 2715, 2003, Springer-Verlag, p. 95-102.

Rocacher D., Bosc P., « The set of fuzzy rational numbers and flexible querying », *Fuzzy Sets and Systems*, 155 (3), 2005, p. 317-339.

Rocacher D., Liétard L., « Relations d'ordre floues sur des quantité floues et expressions de requêtes flexibles », *Rencontres francophones sur la logique floues et ses applications LFA'04*, 2004, Nantes, p. 253-260.

Schweizer B., Sklar P., « Associative functions and abstract semi-groups », *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 10, 1963, p. 69-81.

Whalen T., « Parameterized R-implications », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 134, 2003, p. 231-281.

Wygralak M., « Questions of cardinality of finite fuzzy sets », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 102, 1999, p. 185-210.

Yager R., « On the theory of bags », *International Journal of General Systems*, vol. 13, 1986, p. 23-27.

Yager R.R., « On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making », *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18, 1988, p. 183-190.

Zadeh L. A., « A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages », *Comp. Math. App.*, vol. 9, 1983, p. 149-184.

Daniel Rocacher *a soutenu son Habilitation à Diriger des Recherches à l'Université de Rennes 1. Il est actuellement maître de conférences à l'Ecole Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie (ENSSAT, école d'ingénieurs interne à l'Université de Rennes1) de Lannion. Il mène ses recherches dans le cadre de l'équipe Badins de l'IRISA (Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires). Ses activités de recherche portent sur l'interrogation flexible de bases de données et la personnalisation. En particulier, il s'intéresse à l'étude de quantités floues et de leur utilisation dans le cadre de l'accès personnalisé aux systèmes d'information.*

Patrick Bosc *est professeur en informatique à l'ENSSAT. Il mène ses recherche à l'IRISA où il dirige l'équipe Badins dont les thèmes portent sur l'étude de la gradualité et de l'imprécision dans les bases de données.*

Ludovic Liétard *a obtenu son doctorat en informatique à l'Université de Rennes 1. Il est actuellement maître de conférences à l'IUT de Lannion. Il mène ses recherches dans le cadre de l'équipe Badins de l'IRISA. Ses travaux concernent notamment l'étude d'opérateurs d'agrégation dans le cadre de l'interrogation flexible de bases de données.*